ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Dans ce problème $\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels y compris 0, $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} - \{0\}$, $\mathbf{R}$ le corps des réels et $\mathbf{C}$ le corps des complexes.

PREMIÈRE PARTIE

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. On définit le nombre $A_n(x)$ par :

$$A_1(x) = x$$
$$A_2(x) = x^2 - 2$$
$$A_{k+2}(x) = x\,A_{k+1}(x) - A_k(x) \quad (k \in \mathbf{N}^*).$$

1° Montrer que l'on dispose ainsi, pour n donné, d'un polynôme A_n (dont la valeur au point x est $A_n(x)$).

Quel est le terme de plus haut degré de A_n ?

2° On pose, pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $t \in \mathbf{C}$:

$$V_n(t) = A_n(-t) + (-1)^{n+1} A_n(t)$$

a. Calculer, pour $k \in \mathbf{N}^*$, le nombre

$$V_{k+2}(t) + t\,V_{k+1}(t) + V_k(t).$$

b. Calculer $V_1(t)$ et $V_2(t)$.

c. Calculer, pour $n \in \mathbf{N}^*$, $V_n(t)$ en fonction de n et t.

d. Écrire une relation simple entre $A_n(-t)$ et $A_n(t)$.

3° Pour $x \in \mathbf{C}$, x donné, on désigne par λ et μ les deux nombres complexes qui ont pour somme x et pour produit 1.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose :

$$U_n(x) = A_n(x) - (\lambda^n + \mu^n).$$

a. Calculer, pour $k \in \mathbf{N}^*$

$$U_{k+2}(x) - (\lambda + \mu)\,U_{k+1}(x) + \lambda\mu\,U_k(x).$$

b. Calculer $U_1(x)$ et $U_2(x)$.

c. Calculer pour $n \in \mathbf{N}^*$, $U_n(x)$ puis $A_n(x)$.

Justifier les réponses.

4° *a.* On suppose dans cette question $x \in \mathbf{R}$, $x \in [-2, 2]$. Calculer, en fonction de n et de $\theta = \operatorname{Arc\,cos} \frac{x}{2}$, les nombres λ et μ, puis $A_n(x)$.

b. On suppose dans cette question $x \in \mathbf{R}$, $x \geqslant 2$. Calculer, en fonction de n et de $\varphi = \operatorname{Arg\,ch} \frac{x}{2}$ (exclusivement) λ, μ, puis $A_n(x)$.

c. On suppose dans cette question $x \in \mathbf{R}$, $x \leqslant -2$. Calculer, en fonction de n et de $\psi = \operatorname{Arg\,ch}\left(-\frac{x}{2}\right)$, (exclusivement) λ, μ, puis $A_n(x)$.

d. Retrouver, à partir de 4° *a.*, *b.*, *c.*, la relation simple entre $A_n(-t)$ et $A_n(t)$.

5° *a.* Rechercher les racines réelles du polynôme A_n.

b. Décomposer A_n en un produit de polynômes du 1er degré.

.../...

DEUXIÈME PARTIE

On se propose d'étudier l'équation différentielle :

$$(e_n) \quad (x^2 - 4)\, y'' + x y' - n^2 y = 0 \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

On désigne par E_n l'ensemble des solutions de e_n définies sur l'intervalle $J =]2, + \infty[$.

1° Que devient l'équation différentielle (e_n) quand on effectue le changement de variable $\varphi = \operatorname{Arg\,ch} \frac{x}{2}$, $x \in J$?

2° *a.* Déterminer l'ensemble E_n pour $n = 1$.

b. Pour $n \geqslant 2$, montrer que l'application F_n de J dans **R** définie par :

$$x \longmapsto F_n(x) = \frac{A_{n+1}(x) - A_{n-1}(x)}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

appartient à E_n.

En utilisant la première partie, 4° question, donner une expression de l'élément le plus général de E_n.

3° Rechercher les solutions de (e_n) dans chacun des intervalles $J' =]-\infty, -2[$ et $J'' =]-2, +2[$.

TROISIÈME PARTIE

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, $n \geqslant 2$.

On désigne par Ω_n la matrice carrée d'ordre n dont le terme général $\omega_{i,j}$ (ligne i, colonne j) est défini par :

a. $\omega_{1,2} = 2$; $\omega_{n,n-1} = 1$;

b. Pour $2 \leqslant i \leqslant n - 1$ $\omega_{i,i+1} = \omega_{i,i-1} = 1$;

c. $\omega_{i,j} = 0$ dans les autres cas.

On désigne par Φ_n le polynôme caractéristique de Ω_n :
$\Phi_n(s) = \det(\Omega_n - sI_n)$, I_n matrice unité d'ordre n.

Soit $x \in \mathbf{C}$. On pose

$\omega_n(x) = \Phi_n(-x)$

$B_n(x) = \omega_n(x) - A_n(x)$ (A_n polynôme de la première partie).

1° On suppose $k \in \mathbf{N}^*$, $k \geqslant 2$.

En développant suivant la dernière colonne le déterminant $\Phi_{k+2}(s)$:

a. Trouver une relation linéaire et homogène entre $\Phi_{k+2}(s)$, $\Phi_{k+1}(s)$, $\Phi_k(s)$. (Les coefficients dépendant exclusivement de s et k).

b. Trouver une relation entre $B_{k+2}(x)$, $B_{k+1}(x)$, $B_k(x)$. (Les coefficients dépendant exclusivement de s et k).

2° *a.* Calculer $B_2(x)$ et $B_3(x)$.

b. Calculer $B_n(x)$, $\omega_n(x)$ puis $\Phi_n(s)$ pour $n \in \mathbf{N}^*$, $n \geqslant 2$.

3° La matrice Ω_n est-elle diagonalisable ? Justifier la réponse.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail